ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ КИТАЯ

Мальсагов Р. М.
(*Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва*)

В работе рассматривается фондовый рынок с тремя типами агентов: основные держатели акций, покупающие их в целях получения прибыли за счет роста стоимости и дивидендов в долгосрочной перспективе (I тип) и игроки рынка с краткосрочными стратегиями: профессиональные трейдеры, угадывающие среднесрочное изменение цен (II тип) и непрофессиональные игроки рынка (III тип), количественно преобладающие на фондовом рынке Китая, имеющие похожее друг на друга поведение, несклонные к риску и резкому изменению своих стратегий, торгующие в зависимости от наблюдаемого изменения цены актива. В рамках работы для описания агентов третьего типа используется подход приближения среднего поля ([2]).

Пусть, как в [1], запас акций у агентов третьего типа $x(t)$ изменяется согласно следующему СДУ:

(1) $$dx_t = \alpha(t, x_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \in (0, T_1], \quad x_0 = \tilde{x},$$

где $\alpha : [0, T_1] \times \Re \to \Re$ – планы по покупкам/продажам акций (непрерывное управление), $\sigma \in \Re$, W_t – винеровский процесс.

Обозначим за $u(t, x)$ функцию цены агентов III типа, модифицированную по сравнению с [1] с помощью добавления под интеграл члена, зависящего от цены акции (изначально модель не отражала этой зависимости, поэтому не являлась достаточно реалистичной), и запишем ее вид:

(2) $$\max_{\alpha} \mathrm{E}\int_{t}^{T_1} (\ln m(\tau, x_\tau) - \frac{{\alpha_\tau}^2}{2} - \lambda {x_\tau}^2 + \frac{1}{S_\tau}\frac{dS_\tau}{d\tau}\alpha_\tau)d\tau.$$

Для нахождения оптимального поведения агентов III типа составляется уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

(3) $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{S_t}\frac{dS_t}{dt})-\lambda x^2=-\ln m(t,x),$

(4) $u(T_1,x)=-\theta(x-a)^2,\ \theta>0,\ a\in\Re,\ \alpha=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{S_t}\frac{dS_t}{dt}.$

Обозначив за $m(t,x)$ плотность распределения агентов III типа по количеству акций, запишем уравнение Фоккера-Планка, описывающее их эволюцию:

(5) $\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha(t,x)m(t,x))-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}=0,$

(6) $m(0,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_0^2}}\exp(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\psi_0^2}),\ x,\mu_0\in\Re,\ \psi_0>0.$

Также введем модифицированное по сравнению с [1] уравнение, описывающее изменение цены акции при $S(0)=S_0$:

(7) $dS_t=S(M_t+\beta_t)+\gamma_t,\ M_t=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t,z)m(t,z)dz,$

где β_t - покупки/продажи профессиональных трейдеров, γ_t - поведение цены акции в отсутствии торговой активности.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Решениями задачи (1) – (7) являются функции

(8) $u(t,x)=\sum_{i=0}^{2}c_i(t)x^i,\ m(t,x)=\exp\sum_{j=0}^{2}D_i(t)x^i,$

где $c_i(t),\ D_j(t)$ - решения выведенных в работе ОДУ Риккати.

Литература

1. FATONE L., MARIANI F., RECCHIONI M.C., ZIRILLI F. *A trading execution model based on mean field games and optimal control*. // Applied Mathematics, 5, 3091-3116, 2014.
2. LASRY J.-M., LIONS P.-L. *Mean field games*. // Japanese Journal of Mathematics, 2(1), 229-260, 2007.