АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОБУЧЕНИЯ

Павлов О. В.
(*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара*)

В процессе освоения новой продукции на промышленных предприятиях наблюдается эффект кривой обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Снижение затрат на единицу продукции (удельных затрат) при увеличении кумулятивного объёма производства делает актуальными постановки задач динамической оптимизации.

Задача динамического планирования математически формализуется как задача оптимального управления:

(1) $$J = \int_0^T C(x(t),u(t))e^{-\delta t}dt = \int_0^T c(x(t))u(t)e^{-\delta t}dt \to \min.$$

(2) $$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),$$

(3) $$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t),\ T = 0,T,$$

(4) $$x(0) = x_0,$$

(5) $$x(T) = x_0 + R,$$

где $C(x(t),u(t))$ - затраты на производство продукции, $c(x(t))$ - удельные затраты, *u(t)* - объём производства в момент времени *t*, *x(t)* - кумулятивный объём производства, δ - ставка дисконтирования руководства предприятия, *T* – время производственного процесса, x_0 - объём произведенной продукции до начального момента времени, характеризует начальный производственный опыт, *R* – заданный объём продукции.

Динамика изменения удельных затрат от кумулятивного объёма производства описывается различными моделями кривой обучения. В работе рассматриваются степенная, экспоненциальная и логистическая модели.

Степенная модель кривой обучения имеет следующий вид:

(6) $c(x(t)) = ax(t)^{-b}$,

где a – затраты на производство первого изделия, b – индекс обучения. Индекс обучения характеризует темп снижения удельных затрат на производство продукции при увеличении кумулятивного объёма производства.

Экспоненциальная модель кривой обучения:

(7) $c(x(t)) = k + \beta e^{-\alpha x(t)}$.

где α - индекс обучения, k, β - параметры модели.

Логистическая модель кривой обучения:

(8) $c(x(t)) = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min})\left[\dfrac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}\right]$,

где $c_{\min}$, $c_{\max}$- минимальные и максимальные значения трудоемкости, α - индекс обучения, β - параметр модели.

Для решения сформулированных задач оптимального управления (1)-(8) в работе применялся принцип максимума Понтрягина. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина к задачам невозможно, так как в этом случае существует особое управление. Осуществлен переход к эквивалентным задачам, в которых предполагается логарифмический вид целевой функции руководства предприятия:

$$J = \int_0^T \ln[c(x(t))u(t)]e^{-\delta t}dt \to \min.$$

Получены аналитические решения задач с помощью принципа максимума Понтрягина для различных моделей кривых обучения (6)-(8). Проведено исследование влияния индекса обучения, начального опыта и ставки дисконтирования на оптимальные объёмы производства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606.